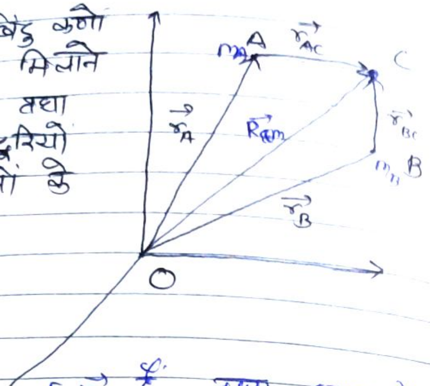
1

प्रमेय, सिद्ध करना है कि दो बिंदु कणों का द्रव्यमान केन्द्र उनको मिलाने वाली रेखा पर स्थित होता है तथा द्रव्यमान केन्द्र से कणों की दूरियो का अनुपात, उनके द्रव्यमानों के व्युत्क्रमानुपात होता है।



उत्पत्ति - चित्र मे m_A व m_B के दो द्रव्यमान कण हैं, जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r}_A$ व $\vec{r}_B$ हैं, तथा द्रव्यमानकेंद्र C है।

कण A से द्रव्यमान केंद्र C का स्थिति सदिश $\vec{r}_{AC}$ इसी प्रकार B से द्रव्यमानकेंद्र C का स्थिति सदिश $\vec{r}_{BC}$ जो

$$\vec{r}_A + \vec{r}_{AC} = \vec{R}_{cm} \quad \text{----- (1)} \quad \text{(सदिश के योग का नियम)}$$

$$\vec{r}_B + \vec{r}_{BC} = \vec{R}_{cm} \quad \text{---- (2)}$$

द्रव्यमान केंद्र का स्थिति सदिश

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B}{m_A + m_B} \quad \text{---- (3)}$$

$$\vec{r}_{AC} = \vec{R}_{cm} - \vec{r}_A = \frac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B}{m_A + m_B} - r_A$$

$$= \frac{\cancel{m_A\vec{r}_A} + m_B\vec{r}_B - \cancel{m_A r_A} - m_B r_A}{m_A + m_B}$$

$$\vec{r}_{AC} = \frac{m_B(\vec{r}_B - \vec{r}_A)}{m_A + m_B} \quad \text{---- (4)}$$

2

$$\vec{r}_{BC} = \frac{m_A(r_A - r_B)}{m_A + m_B} \quad \text{------ (5)}$$

समी. (4) व (5) से स्पष्ट है कि $\vec{r}_{AC}$ व $\vec{r}_{BC}$ की दिशाएँ एक-दूसरे के विपरित हैं। दोनो दिशाएँ A व B को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश हैं। अर्थात द्रव्यमान केंद्र C, कणों को मिलाने वाली रेखा पर स्थित होता है।

अब समीकरण।

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B}{m_A + m_B}$$

$$\vec{R}_{cm}(m_A + m_B) = m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B$$

$$\vec{R}_{cm} m_A + \vec{R}_{cm} m_B = m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B$$

$$\vec{R}_{cm} m_A - m_A\vec{r}_A = m_B\vec{r}_B - \vec{R}_{cm} m_B$$

$$m_A(\vec{R}_{cm} - \vec{r}_A) = m_B(\vec{r}_B - \vec{R}_{cm})$$

समी. (1) व समी. (2) से

$$m_A \vec{r}_{AC} = m_B(-\vec{r}_{BC})$$

$$m_A\vec{r}_{AC} = m_B\vec{r}_{CB}$$

$$\frac{\vec{r}_{AC}}{\vec{r}_{CB}} = \frac{m_B}{m_A} \quad \left[\because \vec{r}_{BC} = -\vec{r}_{CB}\right]$$

अर्थात द्रव्यमान केंद्र से कणों की दूरियों का अनुपात द्रव्यमानों के व्युत्क्रमानुपात में होता है।

(३)

(Elastic and Inelastic Collision)

प्रत्यास्थ संघट्ट   अप्रत्यास्थ संघट्ट

जब दो कण एक-दूसरे के पास पहुँचते हैं, तो उनकी परस्पर अन्योन्य क्रिया (आकर्षण - प्रतिकर्षण टकराव) के कारण उनकी गति परिवर्तित हो जाती है। इस क्रिया को संघट्ट कहते हैं।

हम जानते हैं कि यदि किसी system में बाह्य बल आरोपित नहीं होता है, तब

(external) $\vec{F}_{ext} = 0$, (internal) $\vec{F}_{int} = 0$.

(Total). $\vec{F} = 0$

$\vec{F} = 0$

$ma = 0$

$a = 0$

$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{constant}.$

अब यदि वेग संरक्षित है तब रैखिक संवेग भी संरक्षित होगा। क्योंकि

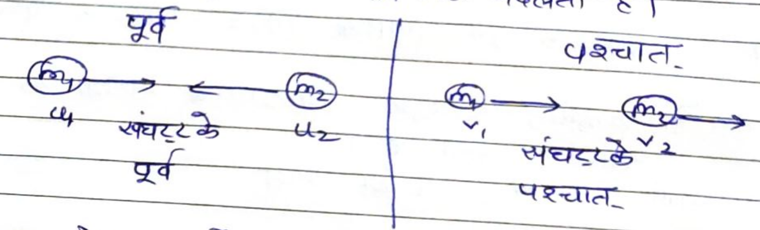
(रैखीय संवेग) $p = mv$

संघट्ट निम्न दो प्रकार का होता है:—

1) पूर्णतः प्रत्यास्थ संघट्ट
2) अप्रत्यास्थ संघट्ट

(४)

पूर्णतः प्रत्यास्थ संघट्ट (Perfectly Elastic collision) - इस प्रकार के संघट्ट में रैखिक संवेग एवं गतिज ऊर्जा दोनो संरक्षित होता है। अर्थात संघट्ट के पूर्व एवं पश्चात रैखिक संवेग एवं गतिज ऊर्जा का मान नहीं बदलता है।



चित्र से हम देख सकते हैं दो स्थिति हैं एक संघट्ट के पूर्व एवं पश्चात। माना की कण m_1 व m_2 एक-दूसरे की तरफ $\vec{u}_1$ व $\vec{u}_2$ वेग से गति कर रहे हैं। संघट्ट के पश्चात उनका वेग क्रमशः $\vec{v}_1$ व $\vec{v}_2$ हो जाता है, तो रैखिक संवेग के संरक्षण के नियम से,

संघट्ट के पूर्व संवेग = संघट्ट के पश्चात संवेग

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \quad \text{——(1)}$$

तथा गतिज ऊर्जा के संरक्षण के नियम से,

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$m_1u_1^2 + m_2u_2^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2$$

$$m_1u_1^2 - m_1v_1^2 = m_2v_2^2 - m_2u_2^2$$

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2)$$

$$m_1(u_1+v_1)(u_1-v_1) = m_2(v_2-u_2)(v_2+u_2)$$

——(2)

5

समी. (1) व समी. (2) से,

$$(u_1+v_1) = (u_2+v_2)$$

$$(u_1-u_2) = (v_2-v_1) \quad \text{----- (3)}$$

या संघट्ट के पूर्व आपेक्षिक वेग = संघट्ट के पश्चात आपेक्षिक वेग

गैस के अणुओं, परमाणुओं, इलेक्ट्रॉनों व प्रोटोनों के मध्य संघट्ट प्रत्यास्थ होता है।

समी. (3) से, v_2 के मान

$$v_2 = u_1-u_2+v_1$$

को समी. (1) में रखने पर

$$m_1u_1+m_2u_2 = m_1v_1+m_2v_2$$

$$m_1u_1+m_2u_2 = m_1v_1+m_2(u_1-u_2+v_1)$$

$$m_1v_1 = m_1u_1+m_2u_2-m_2(u_1-u_2+v_1)$$

$$m_1v_1 = m_1u_1+m_2u_2-m_2u_1+m_2u_2-m_2v_1$$

$$m_2v_1+m_1v_1 = 2m_2u_2+m_1u_1-m_2u_1$$

$$(m_2+m_1)v_1 = 2m_2u_2+(m_1-m_2)u_1$$

$$v_1 = \frac{2m_2u_2}{(m_1+m_2)}+\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)u_1 \quad \text{---- (4)}$$

6

अब समी. (3) से

$$v_1 = v_2-u_1+u_2$$

समी. (1) में रखने पर

$$m_1u_1+m_2u_2 = m_1(v_2-u_1+u_2)+m_2v_2$$

$$m_1u_1+m_2u_2 = m_1v_2-m_1u_1+m_1u_2+m_2v_2$$

$$m_1u_1+m_1u_1+m_2u_2 = m_1u_2+(m_1+m_2)v_2$$

$$2m_1u_1+m_2u_2-m_1u_2 = (m_1+m_2)v_2$$

$$(m_1+m_2)v_2 = 2m_1u_1+u_2(m_2-m_1)$$

$$v_2 = \frac{2m_1u_1}{(m_1+m_2)}+\frac{(m_2-m_1)}{(m_2+m_1)}u_2 \quad \text{---- (5)}$$

विशेष स्थितियाँ :-

(a) $m_1 = m_2$ (दोनों का द्रव्यमान बराबर हो)

समी. (4) से

$$v_1 = \frac{2m_2u_2}{2m_2}+\frac{m_1-m_1}{2m_2}u_1$$

$$v_1 = u_2+0$$

$$v_1 = u_2$$

समी. (5) से

$$v_2 = \frac{2m_1u_1}{2m_1}+\frac{m_2-m_2}{2m_1}u_2$$

$$v_2 = u_1+0$$

$$v_2 = u_1$$

अर्थात् प्रत्यास्थ संघट्ट की स्थिति में यदि दोनों कणों का द्रव्यमान समान होता है तो, संघट्ट के पश्चात उनके वेग आपस में बदल जाते हैं।

(b) यदि $u_2 = 0$ या एक कण स्थिर हो और एक गतिमान हो। और $m_1 = m_2$ तो समी (4) व (5) से

$v_1 = u_2$ व $v_2 = u_1$

$v_1 = 0$

अर्थात प्रथम कण स्थिर अवस्था में आ जायेगा व दूसरा कण प्रथम कण के वेग से चलने लगेगा। इस अवस्था में ऊर्जा का स्थानान्तरण अधिकतम होगा।

(c) यदि $u_2 = 0$ तथा $m_2 \gg m_1$ तो समी. (4) व (5) से

$v_1 \approx -u_1$, तथा $v_2 \approx 0$

(d) यदि $u_2 \approx 0$, व $\cancel{m_2 \ll m_1}$ $m_2 \ll m_1$

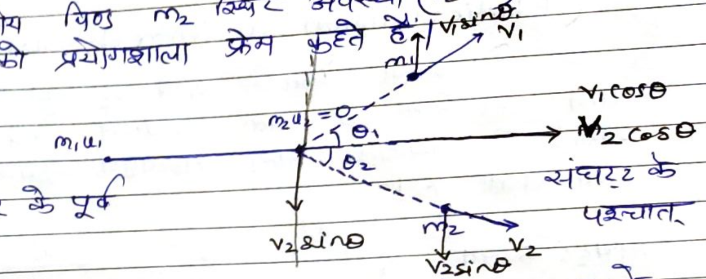
$v_1 \approx u_1$ व $v_2 \approx 2u_1$

प्रयोगशाला फ्रेम में प्रत्यास्थ संघट्ट

[Elastic collision in Laboratory frame] -

व्यापक रूप में संवेग एवं गतिज ऊर्जा एवं संवेग संरक्षण नियमों के आधार पर संघट्ट के पश्चात पिण्डों का वेग v_1 व v_2 की गणना करना सम्भव नहीं होता है। क्योंकि v_1 व v_2 का मान ज्ञात करने के लिये छः स्वतंत्र समीकरणों की आवश्यकता होती है जबकि हमें तीन समीकरण रेखीय संवेग संरक्षण से व एक समी. एक ऊर्जा संरक्षण नियम से प्राप्त होता है।

इस समस्या के समाधान के लिये एक ऐसा फ्रेम लेते हैं जिसमें द्वितिय पिण्ड m_2 स्थिर अवस्था ($v_2 = 0$) में रहता है। इस फ्रेम को प्रयोगशाला फ्रेम कहते हैं।



अतः माना प्रयोगशाला में m_1 द्रव्यमान का वेग (X-अक्ष के अनुदिश) से स्थिर अवस्था में रखे m_2 द्रव्यमान के पिण्ड से संघट्ट करता है जिससे m_1 द्रव्यमान X-अक्ष से θ_1 कोण बनाते हुये वेग v_1 से गति करता है जबकि m_2 द्रव्यमान v_2 वेग से X-अक्ष से θ_2 कोण बनाते हुये गति करता है।

X-अक्ष के अनुदिश रैखिक संवेग संरक्षण के नियम से,

संघट्ट के पूर्व   पश्चात

$$m_1 u_1 + 0 = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2 \quad \text{——(1)}$$

Y-अक्ष के अनुदिश रैखिक संवेग संरक्षण के नियम से,

संघट्ट के पूर्व   पश्चात

$$0 = m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_2 \sin\theta_2 \quad \text{——(2)}$$

गतिज ऊर्जा संरक्षण नियम से,

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \text{——(3)}$$

समी. (1), (2) व (3) से v_1, v_2 व θ_2 का मान ज्ञात किया जा सकता है।